

# De variedades tóricas a variedades de conglomerado

Parte 1 basado en trabajo en colaboración con Mandy Cheung y Alfredo Nájera Chávez

Parte 2 basado en trabajo en colaboración con Bosco.

## Variedades tóricas

Def: Una variedad tórica es un encaje abierto  $T \subset Y$  de un toro  $T$  en una variedad  $Y$  tal que la acción  $T \curvearrowright T$  se extiende a una acción  $T \curvearrowright Y$ .

↳ Se puede agregar unos adjetivos acá: no-nul, de tipo finito

## Por qué nos interesan?

- Problemas de compactificaciones de espacios moduli.  
La geometría enumerativa se funciona mejor con espacios compactos. Para tener una compactificación que se comporta bien, es común pedir que la compactificación se vea tórica localmente.
- Acá se puede estudiar geometría algebraica a través de la geometría convexa poliedral.  
Mucho más sencillo.
- En muchos casos se puede reducir problemas no tóricos a problemas tóricos más sencillos.  
(Degeneraciones tóricas, construcción de espejo por Batyrev-Borisov)
- Se puede intentar generalizar las construcciones poliedrales para entender variedades no tóricas.  
El tema de hoy.

Ejemplos:  $\mathbb{C}^* \subset \mathbb{C}$ ,  $\mathbb{C}^* \subset \mathbb{P}^1$ ,  $(\mathbb{C}^*)^n \subset \mathbb{C}^n$ ,  $(\mathbb{C}^*)^n \subset \mathbb{P}^n$ ,  $(\mathbb{C}^*)^n \subset \mathbb{P}^1 \times \dots \times \mathbb{P}^1$

## Modelos mínimos parciales para Variedades de conglomerado

Explosión de subvariedad de la frontera de codim 2

Complemento de transformación estricta de la frontera se llama una "variedad de conglomerado".

Dado explosión  $f: Y \rightarrow \bar{Y}$  en una subvariedad  $\bar{H} \subset \bar{Y}$  de codim  $c$ , tenemos que

$$K_Y = f^*(K_{\bar{Y}}) + (c-1)E$$

$$(c=2): -K_Y = f^*(\underbrace{-K_{\bar{Y}}}_{\text{Frontera tórica}}) - E \quad \leftarrow \text{transformación estricta de frontera tórica}$$

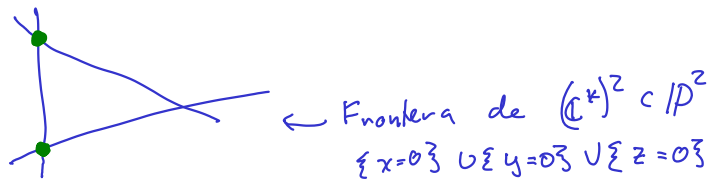
## Por qué nos interesan?

- Se aparecen en muchas áreas de matemáticas.  
Geometría hiperbólica, teoría de representaciones de grupos / carcajes, teoría de campos cuánticos, sistemas integrables, ...
- Clase importante y manejable de variedad log  $\mathbb{C}^*$ .  
Se está desarrollando una teoría de simetría especular para variedades log Calabi-Yau, pero el caso general es bastante complicado.

## Ejemplos:

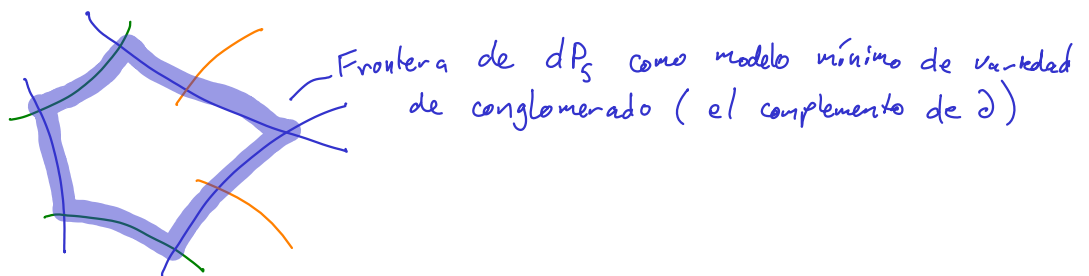
Superficie del Pezzo de grado 5:

(Explosión de  $\mathbb{P}^2$  en 4 puntos en posición general)



$Z$  "explosiones tónicas" — explosiones de órbitas tónicas.  
El resultado sigue siendo una variedad tónica.

Faltan 2 que no pueden ser tónicas (posición general).



Superficie cúbica (Explosión de  $\mathbb{P}^2$  en 6 puntos en posición general)



En dimensión  $> 2$ , se cuesta más trabajo dibujar los ejemplos pero la idea sigue siendo lo mismo. Ejemplos son:

Grassmannianos (La variedad de conglomerados en  $Gr_{2,5}$  se reduce al primer ejemplo)

Variedades de banderas

Grupos algebraicos

## Convexidad en la teoría de variedades tónicas

Fijense: Multiplicación de caracteres de un toro se describe con adición vectorial:

$$z^{m_1} \cdot z^{m_2} = z^{m_1+m_2} \quad m_i \in M = \text{car}(T)$$

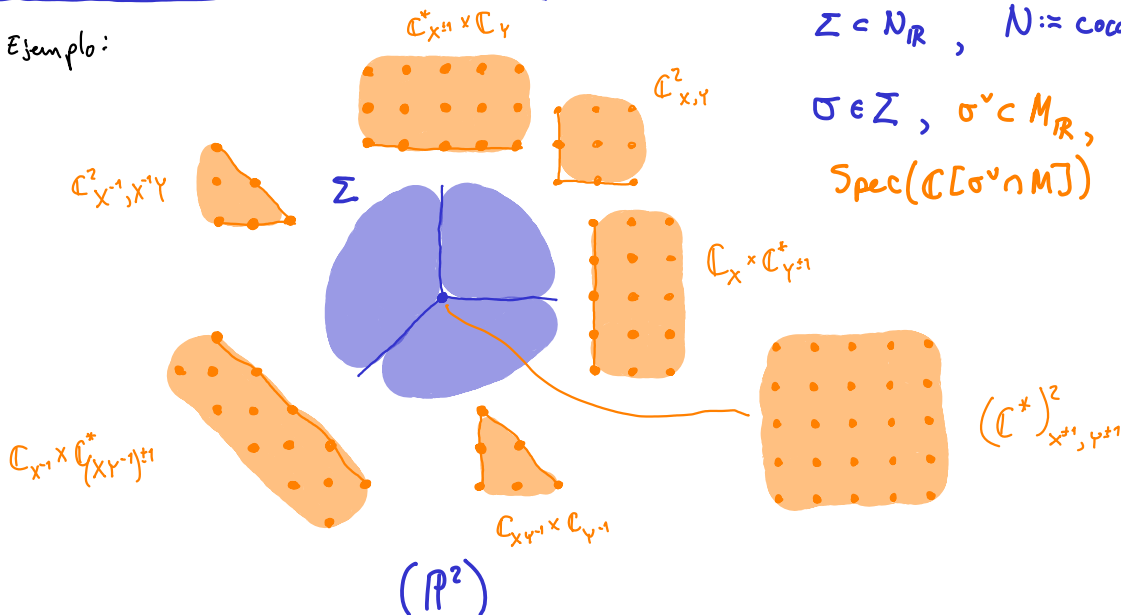
⇒ Si  $SCM$  es base para un anillo de funciones o de secciones, entonces  $S$  está cerrado bajo adición.

Tenemos un poquito más: tal  $SCM$  satisface  $S = C \cap M$  para un cono convexo  
racional  $C \subset M_{\mathbb{R}}$ .

↑  
No necesariamente  
estrictamente convexo

Caso de funciones en afines abiertas: (abiertos)

Ejemplo:



$Z = N_{\mathbb{R}}, N := \text{coker}(T)$

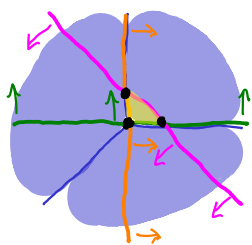
$\sigma \in Z, \sigma^v \subset M_{\mathbb{R}}, \sigma^v \cap M$  monoid  
 $\text{Spec}(\mathbb{C}[\sigma^v \cap M])$  variedad afín

Caso de anillo de secciones de un divisor o haz lineal: (curvas cerradas sobre poliedro)

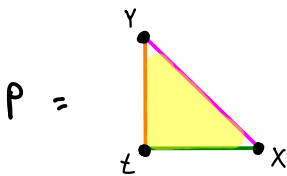
Ejemplos:

$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(D_{\{z=0\}})$

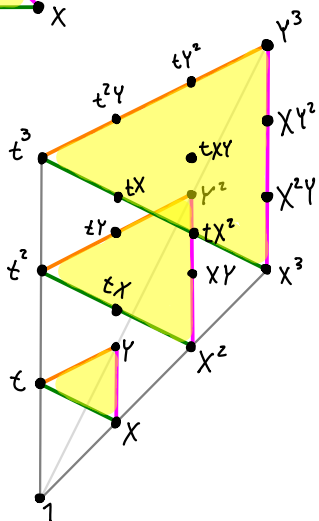
$D_{\{z=0\}} = 0D_{\{x=0\}} + 0D_{\{y=0\}} + 1D_{\{z=0\}}$



secciones de  $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(D_{\{z=0\}})$



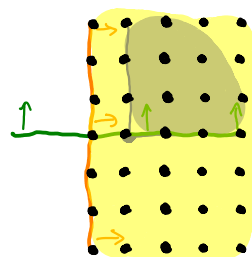
$\overline{C(P)} = C(P) =$



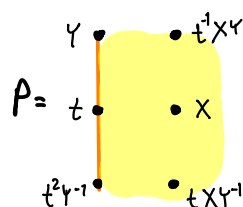
Anillo de secciones  $\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} R_i, R_i = \Gamma(\mathbb{P}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}(iD_{\{z=0\}}))$

$\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}(D_{\{x=0\}})$

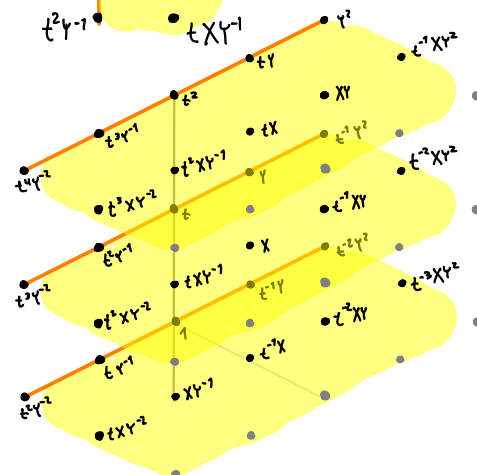
$D_{\{x=0\}} = 1D_{\{x=0\}} + 0D_{\{y=0\}}$



secciones de  $\mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}(D_{\{x=0\}})$



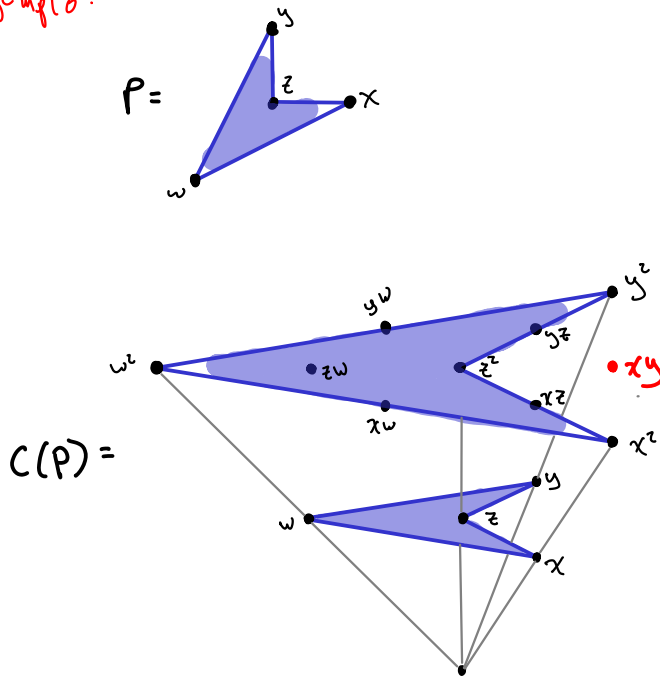
$\overline{C(P)} =$



Anillo de secciones  $\bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_{\geq 0}} R_i, R_i = \Gamma(\mathbb{C}^2, \mathcal{O}_{\mathbb{C}^2}(iD_{\{x=0\}}))$

Ojo: si  $P$  no sea convexa,  $C(P)$  no está cerrado bajo adición.

No ejemplo:



Caso particular: Sea  $D \subset Y$  un divisor amplio relativo a  $\text{Spec}(\mathcal{O}(Y))$ .

$$\Rightarrow \text{Proj}(\bigoplus R_i) = Y$$

Poliedro convexa racional  $\leftrightarrow$  Variedades tóricas relativamente proyectivas polarizadas

Convexidad en la teoría de modelos mínimos parciales de variedades de conglomerado

En el caso tórico, empezábamos con  $M = \text{car}(T)$ , base para  $\mathcal{O}(T)$ .

Sea  $V$  una variedad de conglomerado, no tenemos  $\text{car}(V)$ . ¿Hay una generalización?

$$\text{car}(T) = \text{cocar}(T^v) = (T^v)^{\text{trop}}(\mathbb{Z}) \leftarrow \text{A definir poco a poco}$$

Def: Una variedad log Calabi-Yau  $V$  es una variedad compleja suave que tiene una forma de volumen  $\Omega$  única (salvo escalares) que tiene en peor caso un polo simple en cualquier divisor de cualquiera compactificación de  $V$ .

Ejemplo:  $V = T$ ,  $\Omega = \frac{dz_1}{z_1} \wedge \dots \wedge \frac{dz_n}{z_n} \leftarrow \text{Tiene polo simple en cada divisor tórico}$

Def: Sea  $V$  una variedad compleja. Una valuación discreta divisorial para  $V$  es una valuación discreta  $v: \mathbb{C}(V) \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$  dado por  $v = \text{ord}_D(\cdot)$ , donde  $D$  es (un múltiplo positivo de) un divisor irreducible efectivo de algún  $Y$  biracional a  $V$ .

$$i) v(f \cdot g) = v(f) + v(g)$$

$$ii) v(f+g) \geq \min\{v(f), v(g)\}$$

$$iii) v(f) = \infty \iff f = 0$$

Def: Sea  $(V, \Omega)$  una variedad log CY.

$$V^{\text{trop}}(\mathbb{Z}) := \{ \text{valuaciones discretas divisoriales } v \text{ para } V \mid v(\Omega) < 0 \} \cup \{0\}$$

Ejemplo:  $(T, \Omega)$ .  $n \in N = \text{cocar}(T)$ ,  $n_0$  primitivo con  $n = r \cdot n_0$ ,  $r \in \mathbb{Z}_{>0}$ .

Sea  $\Sigma$  un abanico que contiene el rayo  $\rho = \mathbb{R}_{\geq 0} \cdot n$ . Tenemos el divisor  $D_\rho$  de  $X_\Sigma$ , y  $\text{ord}_{rD_\rho}(z^m) = \langle n, m \rangle$  para cada  $m \in M$ .

Se puede definir  $V^{\text{trop}}(\mathbb{R})$  tomando  $\mathbb{R}_{>0}$  múltiplos de divisores irreducibles efectivos en vez de  $\mathbb{Z}_{>0}$  múltiplos y tomando la completación.

Conjetura (Gross-Hacking-Keel): Sea  $V$  una variedad log CY afín con frontera maximal.

El espejo  $V^\vee$  es también una variedad log CY afín con frontera maximal.

$V^{\text{trop}}(\mathbb{Z})$  parametriza una base de funciones  $\mathcal{D}$  en  $V^\vee$ , con multiplicación dada explícitamente en términos de cuentas de líneas quebradas.  $\leftarrow$  A definir

Dichas cuentas son una versión tropical de cuentas de curvas pseudo-holomorfas en  $V$ .

El diagrama de dispersión: colección de paredes  $\{(\Delta, f_\Delta)\}$  en  $V^{\text{trop}}(\mathbb{R})$ .

Cada pared corresponde a una clase de curva -  $\Delta$  es un cono convexo racional de  $\text{codim } 1$

y  $f_\Delta$  es función generadora de invariantes log Gromov-Witten de la curva.

$\uparrow$  conos de  $\text{codim } 1$  en  $\Sigma$  corresponden a curvas en  $X_\Sigma$ .

Caso  $\text{dim } 2$ :  $\Delta = \mathbb{R}_{\geq 0}(av_i + bv_{i+1})$ ,

$$f_{\Delta} = \exp\left(\sum_{k \geq 1} \sum_{\beta \in H_2(Y; \mathbb{Z})} k N_{\beta}^{\Delta} z^{\beta} X_i^{-ka} X_{i+1}^{-kb}\right)$$

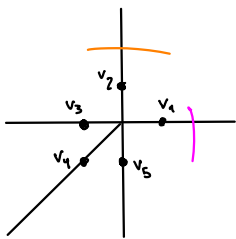
$\leftarrow$  Más detalles en Gross-Hacking-Keel-Siebert "The mirror of the cubic surface".

"Diagrama de dispersión canónica"

En práctica se utiliza el "diagrama de dispersión de conglomerado"

- Más sencillo pero con menos información geométrica.

Ejemplo: Superficie del Pezzo de grado 5 con ciclo de 5 líneas  $(Y, D)$



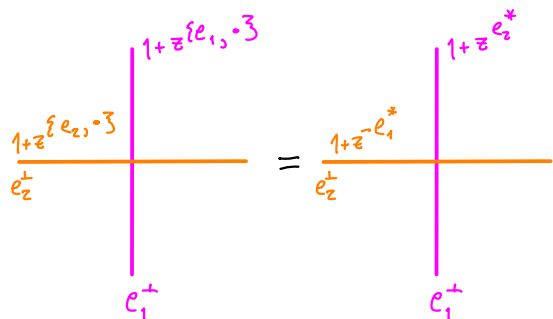
$$\det \begin{pmatrix} v_1 & v_2 \\ v_3 & v_4 \end{pmatrix} = 1$$

$$Q := \begin{matrix} \bullet & \rightarrow & \bullet \\ 1 & & 2 \end{matrix}$$

$$N = \text{span}_{\mathbb{Z}}(e_1, e_2)$$

$$\{ \cdot, \cdot \}: N \times N \rightarrow \mathbb{Z}$$

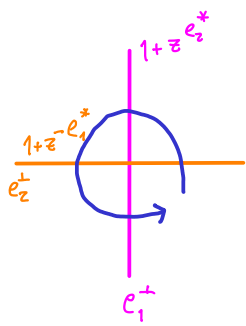
$$\{e_i, e_j\} = \begin{matrix} \# \text{ flechas} \\ i \rightarrow j \end{matrix} - \begin{matrix} \# \text{ flechas} \\ j \rightarrow i \end{matrix}$$



Cruzando paredes: Sea  $\Delta \subset N^\perp$  y  $f_\Delta = 1 + \sum_k c_k z^k \xi_{n, \Delta}$ .

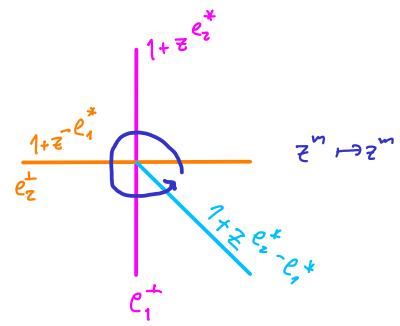
$$p_\Delta: z^m \mapsto z^m f_\Delta^{\pm \langle n, m \rangle}$$

signo determinado por dirección de cruzar



$$z^{e_1^*} \mapsto z^{e_1^*} (1 + z^{e_2^* - e_1^*})$$

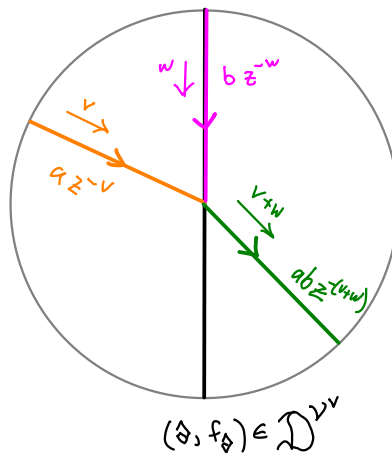
$\neq z^{e_1^*}$   
"inconsistente"



Teorema (Gross-Hacking-Keel-Kontzevich): Existe un diagrama de dispersión consistente  $\mathcal{D}^V$  asociado a cada variedad de conglomerado  $V$ . Es único salvo equivalencia.

Def: Un disco tropical en  $V^{\text{trop}}(\mathbb{R})$  es una gráfica orientada en  $V^{\text{trop}}(\mathbb{R})$  decorada con un monomio de Laurent en cada eje que:

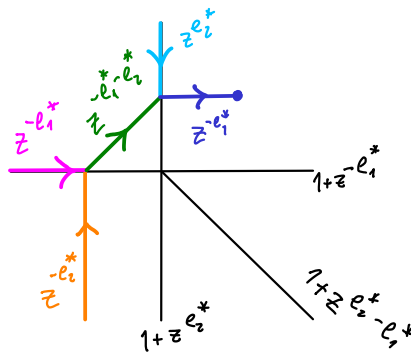
i) localmente en la vecindad de un vertice se ve así:



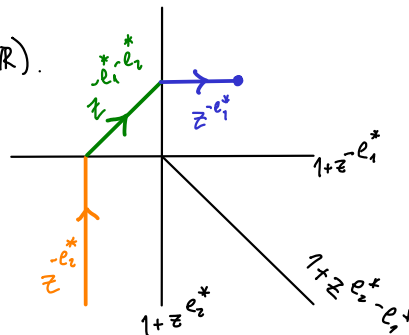
donde  $ab z^{-(u+w)}$  es un término de  $p_D(a z^{-u})$ .

ii) hay un solo eje semi-infinito que genericamente no se encuentre en el soporte de una pared. El coeficiente del monomio de ese eje es 1.

Ejemplo:



Def: Una línea quebrada en  $V^{\text{trop}}(\mathbb{R})$  es el resultado de borrar las contribuciones de paredes de un disco tropical en  $V^{\text{trop}}(\mathbb{R})$ .



Se piensa en una línea quebrada como un mapa  $\gamma: (-\infty, 0] \rightarrow \mathcal{V}^{\text{trop}}(\mathbb{R})$ .

Notación: Sea  $\gamma$  una línea quebrada en  $\mathcal{V}^{\text{trop}}(\mathbb{R})$ .

$I_n(\gamma) :=$  vector exponente de monómio inicial de  $\gamma$

$F(\gamma) :=$  vector exponente de monómio final de  $\gamma$

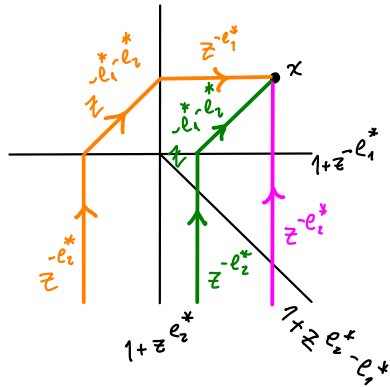
$\text{Mono}(\gamma) :=$  Monómio final de  $\gamma$

Def: La función  $\mathcal{D}_p^{\mathcal{V}}$  se define localmente así:

Sea  $x \in \mathcal{V}^{\text{trop}}(\mathbb{R})$ .  $\mathcal{D}_{p;x}^{\mathcal{V}} := \sum_{\substack{I_n(\gamma)=p \\ \gamma(0)=x}} \text{Mono}(\gamma)$ .

Consistencia de  $\mathcal{D}^{\mathcal{V}}$  implica que las expresiones locales se pegan a una función global  $\mathcal{D}_p^{\mathcal{V}}$ .

Ejemplo:



$$\mathcal{D}_{-e_2^*; x}^{\mathcal{V}} = z^{-e_2^*} + z^{-e_1^* - e_2^*} + z^{-e_1^*}$$

Multiplicación de funciones  $\mathcal{D}$ :

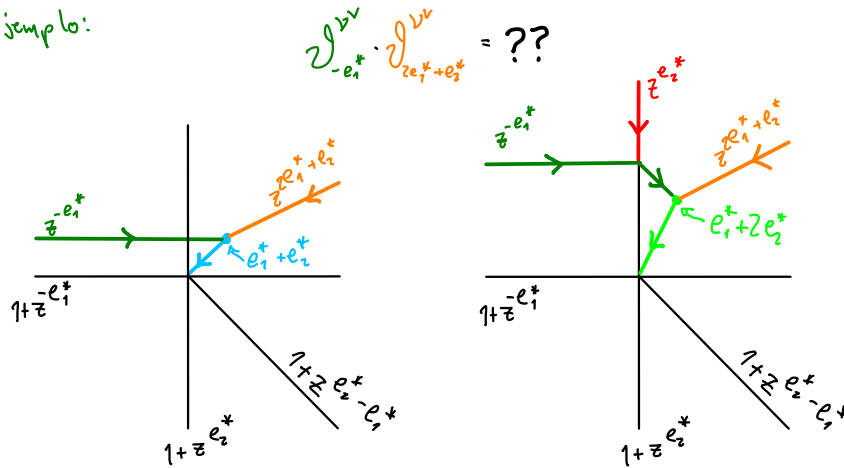
Teorema (Gross-Hacking-Keel-Kontsevich): Sean  $p, q \in \mathcal{V}^{\text{trop}}(\mathbb{Z})$ . Denota los constantes de estructura de funciones  $\mathcal{D}$  en  $\mathcal{V}^{\mathcal{V}}$  como  $\alpha_{p,q}^r$ :  $\mathcal{D}_p \cdot \mathcal{D}_q = \sum_{r \in \mathcal{V}^{\text{trop}}(\mathbb{Z})} \alpha_{p,q}^r \mathcal{D}_r$ . Entonces,

$$\alpha_{p,q}^r = \sum_{\substack{(\gamma_1, \gamma_2) \\ I(\gamma_1)=p, I(\gamma_2)=q \\ \gamma_1(0)=\gamma_2(0)=r \\ F(\gamma_1)+F(\gamma_2)=r}} c(\gamma_1) \cdot c(\gamma_2)$$

← Cuenta de curvas tropicales en  $\mathcal{V}^{\text{trop}}(\mathbb{R})$

discos tropicales pegados como en el ejemplo

Ejemplo:



$$\Rightarrow \mathcal{D}_{-e_1^*}^{\mathcal{V}} \cdot \mathcal{D}_{ze_1^* + ze_2^*}^{\mathcal{V}} = \mathcal{D}_{e_1^* + e_2^*}^{\mathcal{V}} + \mathcal{D}_{e_1^* + ze_2^*}^{\mathcal{V}}$$

$S \subset \mathcal{V}^{\text{trop}}(\mathbb{Z})$

Si  $S \subset \mathcal{M}$  es base para un anillo de funciones o de secciones, entonces

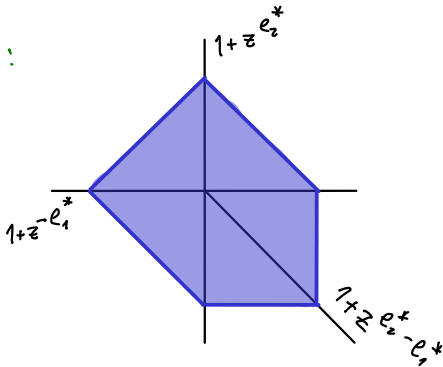
~~S está cerrado bajo adición:~~  $p, q \in S, \alpha_{p,q}^n \neq 0 \Rightarrow r \in S$ .  $\leftarrow$  Se puede interpretar como adición multivariada:  $r \in "p+q"$

Def (Cheung, M, Nájera Chávez): Un subconjunto cerrado  $S \subset \mathcal{V}^{\text{trop}}(\mathbb{R})$  es **convexo** en términos de líneas quebradas si para cada  $s_1, s_2 \in S(\mathbb{Q})$  cada "segmento quebrado" conectando  $s_1$  y  $s_2$  está completamente contenido en  $S$ .

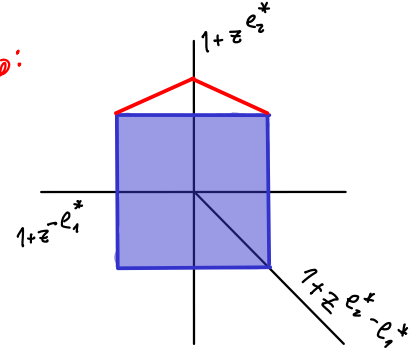
Segmento quebrado: Restricción de una línea quebrada  $\gamma: (-\infty, 0] \rightarrow \mathcal{V}^{\text{trop}}(\mathbb{R})$  a un intervalo  $[t_1, t_2]$ .



Ejemplo:



No Ejemplo:



Se puede utilizar convexidad en términos de líneas quebradas para describir el espacio de secciones o anillo de secciones de un divisor o haz lineal como el caso tórico.

El anillo graduado:

Def (Gross-Hacking - Keel - Kontsevich): Un subconjunto cerrado  $S \subset \mathcal{V}^{\text{trop}}(\mathbb{R})$  es **positivo** si para cada  $a, b \in \mathbb{Z}_{\geq 0}, p \in aS(\mathbb{Z}), q \in bS(\mathbb{Z}),$  y  $r \in \mathcal{V}^{\text{trop}}(\mathbb{Z})$  con  $\alpha_{p,q}^r \neq 0$ , tenemos que:  $r \in (a+b)S$ .

Teorema (Cheung, M, Nájera Chávez): El subconjunto cerrado  $S \subset \mathcal{V}^{\text{trop}}(\mathbb{R})$  es positivo si y solo si  $S$  es convexo en términos de líneas quebradas.

Idea de la prueba:

El problema - Funciones  $\mathcal{D}$  se parametrizan con direcciones asintóticas de líneas quebradas.

Convexidad en términos de líneas quebradas se trata los extremos de segmentos quebrados

La resolución - Reinterpretar multiplicación como promedio ponderado por el tiempo (motivado por "jagged paths" de Gross-Sikhet)

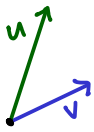
Un poco más honesto: Aún no podemos expresar la multiplicación en dichos términos. Sin hacer referencia a los pares de líneas quebradas no sabemos decir cuales segmentos quebrados no extremos contribuyen al producto. En cambio podemos decir que un segmento contribuye a un producto después de escalar los puntos tropicales.

$\mathcal{D}_{ap} \cdot \mathcal{D}_{bq} \mapsto \mathcal{D}_{Nap} \cdot \mathcal{D}_{N_bq}$ . Lo que hacemos se ve como transformación de Fourier, cambiando momento por posición. Entender eso y formular la multiplicación de funciones  $\mathcal{D}$  en términos de segmentos quebrados sería un buen proyecto para estudiante de doctorado.

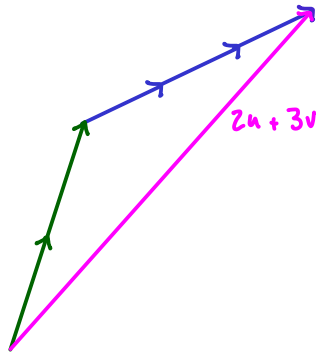
*observación de Greg Muller*  $\rightarrow$



Caso tórico:

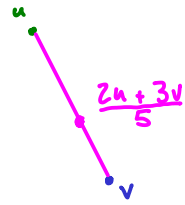


Adición normal

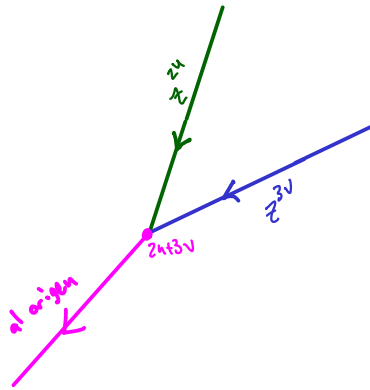


$$z^{2u} \cdot z^{3v} = z^{2u+3v}$$

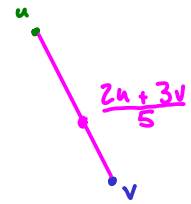
promedio ponderado



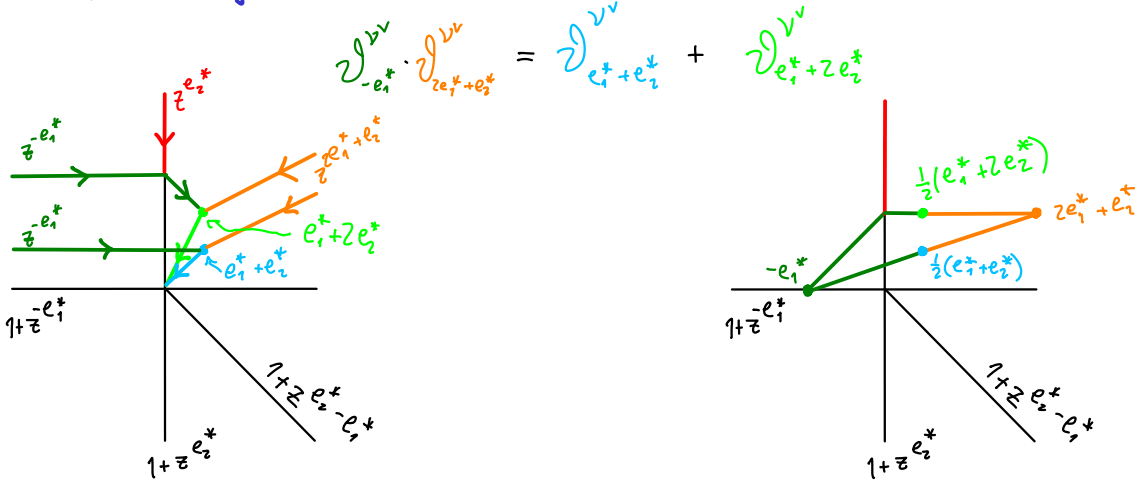
Líneas quebradas



Segmentos quebrados



Caso de variedades de conglomerado:



Convexo en términos de líneas quebradas  $\Rightarrow$  positivo:

- Empezar con  $a, b \in \mathbb{Z}_{>0}$ ,  $p \in S(\mathbb{Z})$ ,  $q \in S(\mathbb{Z})$ , y  $r \in V^{\text{trop}}(\mathcal{Y})$  con  $\alpha_{p,q}^r \neq 0$ .
- Elegir  $(\gamma_1, \gamma_2)$  contribuyendo a  $\alpha_{p,q}^r$ .
- Utilizando  $(\gamma_1, \gamma_2)$ , construye un segmento quebrado  $\tilde{\gamma}$  conectando  $\frac{p}{a} \in S(\mathbb{Q})$  con  $\frac{q}{b} \in S(\mathbb{Q})$ , y pasando por  $\frac{r}{a+b}$ .
- Si convexo en términos de líneas quebradas  $\Rightarrow \frac{r}{a+b} \in S$ , y  $r \in (a+b)S$ .

Positivo  $\Rightarrow$  Convexo en términos de líneas quebradas:

- Similar, pero empieza con el segmento quebrado y construye  $(\gamma_1, \gamma_2)$ .

Conclusión: La noción natural de convexidad en  $V^{\text{trop}}(\mathbb{R})$  tiene las mismas consecuencias geométricas para modelos mínimos parciales de  $V^{\text{trop}}$  que convexidad en  $M_{\mathbb{R}}$  tiene para variedades tóricas  $Y \rightarrow T_N$ .

# Dualidad de Batyrev y Batyrev-Borisov

Def: Una variedad normal  $Y$  es **Gorenstein Fano** si  $-K_Y$  es **Cartier** ( $\leadsto$  Gorenstein) y amplio ( $\leadsto$  Fano).

Un divisor  $D$  es **Cartier** si localmente  $D$  es el divisor de ceros y polos de una función racional.

Sea  $Y_{\Sigma}$  la variedad tórica definida por el abanico  $\Sigma$  en  $N_{\mathbb{R}}$ .

$$-K_{Y_{\Sigma}} = \sum_{\rho \in \Sigma(1)} D_{\rho} \quad \leftarrow \text{rayos de } \Sigma \quad \leftarrow \text{conos máximos de } \Sigma$$

$-K_{Y_{\Sigma}}$  es Cartier  $\iff$  para cada  $\sigma \in \Sigma(\text{máx})$  existe  $m_{\sigma} \in M$  tal que

$$\langle n_{\rho}, m_{\sigma} \rangle = 1 \quad \text{para cada } \rho \in \sigma(1) \quad \leftarrow \text{generador primitivo de } \rho$$

En tal caso  $-K_{Y_{\Sigma}}|_{U_{\sigma}} = (z^{m_{\sigma}})$ .

Def: Un politopo integral  $P \subset M_{\mathbb{R}}$  es **reflexivo** si su politopo polar  $P^{\circ} := \{n \in N_{\mathbb{R}} : \langle n, m \rangle \geq -1 \ \forall m \in P\}$  también es un politopo integral.

Teorema: • Si  $Y$  es una variedad tórica Gorenstein Fano de dimensión  $d$ ,

$P_{-K_Y}$  es un politopo reflexivo de dimensión  $d$ .

• Si  $P$  es un politopo reflexivo de dimensión  $d$ ,

la variedad tórica proyectiva asociada a  $P$  es Gorenstein Fano.

Sea  $Y$  una variedad tórica Gorenstein Fano y  $D \in |-K_Y|$ .  $\leftarrow$  sistema lineal de  $-K_Y$

Por la fórmula de adjunción:  $K_D = (K_Y + D)|_D = 0$

$Y$  Gorenstein  $\Rightarrow D$  genérico tiene en peor caso singularidades canónicas.

$D$  genérico es una variedad Calabi-Yau con singularidades leves.

## El espejo de Landau-Ginzburg

Sea  $Y_{\rho}$  una variedad tórica Gorenstein Fano y  $D = \sum_{\rho \in \Sigma(1)} D_{\rho}$  la frontera tórica.

El espejo de Landau-Ginzburg es  $W = \sum_{\rho \in \Sigma(1)} z^{\rho} : T^v \rightarrow \mathbb{C}$ .  $\leftarrow$  el toro dual

## El dual de Batyrev

Los conjuntos de niveles de  $W$  casi son Calabi-Yau, pero no son compactos.

Podemos intentar reinterpretar  $W$  como sección de  $\mathcal{O}_X(D')$  para algún  $X \supset T^v$ .

La solución minimalista:  $X :=$  variedad tórica proyectiva asociada a  $\text{Newt}(W)$ .

Observación:  $\text{Newt}(W) = P^{\circ}$ .  $X$  también es Gorenstein Fano.

$X$  e  $Y$  son **duals de Batyrev** y sus hiper-superficies anticanónicas son variedades Calabi-Yau espejos.

Hay una versión de esta construcción para intersecciones completas de codimensión  $d$  por Batyrev-Borisov.

# Programa de investigación con Bosco, Lara Bossinger, Mandy Cheung, y

Alfredo Nájera Chávez — Generalizar estas construcciones para tratar modelos mínimos Gorenstein Fano de variedades de conglomero en vez de variedades tóricas Gorenstein Fano.

Un paso (investigando con Bosco): Generalizar "politopo reflexivo en  $M_{\mathbb{R}}$ " a "subconjunto reflexivo de  $V^{\text{trop}}(\mathbb{R})$ ". Contestar la siguiente pregunta:

¿Hay una correspondencia 1-1 entre subconjuntos reflexivos de  $V^{\text{trop}}(\mathbb{R})$  y modelos mínimos Gorenstein Fano de  $V^v$ ?

Def: Sean  $V$  y  $V^v$  variedades de conglomero tal que:

- $\{\partial_p^{V^v} : p \in V^{\text{trop}}(\mathbb{Z})\}$  es una base para  $\mathcal{O}(V^v)$
- $\{\partial_v^V : v \in V^{\text{trop}}(\mathbb{Z})\}$  es una base para  $\mathcal{O}(V)$

El emparejamiento tropical es

$$\langle \cdot, \cdot \rangle : V^{\text{trop}}(\mathbb{Z}) \times V^{\text{trop}}(\mathbb{Z}) \rightarrow \mathbb{Z}$$

$$(p, v) \mapsto v(\partial_p)$$

Ojo: hay 2 opciones acá —  $v(\partial_p)$  y  $p(\partial_v)$ . Se conjetura que son iguales. Trabajando en esto con Mandy Cheung, Travis Mandel y Greg Muller.

Def (Bosco, M): Sea  $S \subset V^{\text{trop}}(\mathbb{R})$ . El subconjunto polar de  $S$  es  $S^\circ := \{v \in V^{\text{trop}}(\mathbb{R}) : \langle p, v \rangle \geq -1 \ \forall p \in S(\mathbb{Q})\}$ .

Def: Sea  $S \subset V^{\text{trop}}(\mathbb{R})$ . La envolvente convexa de  $S$  en términos de líneas quebradas es  $\text{conv}_{BL}(S) := \bigcap_{S(\mathbb{Q}) \subset S'} S'$   
 $S'$  convexo en términos de líneas quebradas

Def (Bosco, M): Sea  $S \subset V^{\text{trop}}(\mathbb{R})$ .  $S$  es integral si existe  $A \subset V^{\text{trop}}(\mathbb{Z})$  finito tal que  $S(\mathbb{Q}) = \text{conv}_{BL}(A)(\mathbb{Q})$ .

Def (Bosco, M): Sea  $S \subset V^{\text{trop}}(\mathbb{R})$  un subconjunto integral.  $S$  es reflexivo si  $S^\circ \subset V^{\text{trop}}(\mathbb{R})$  también es integral.

Esperanza: • Si  $(Y, D)$  es un modelo mínimo Gorenstein Fano de  $V^v$ ,

Subconjunto definido por emparejamiento con componentes de  $D$

—  $S_D \subset V^{\text{trop}}(\mathbb{R})$  es reflexivo.

- Si  $S \subset V^{\text{trop}}(\mathbb{R})$  es reflexivo, la variedad proyectiva definida por  $S$  es un modelo mínimo Gorenstein Fano de  $V^v$ .

Def: Sea  $f = \sum_{v \in V^{\text{trop}}(\mathbb{Z})} a_v \vartheta_v^y : V \rightarrow \mathbb{C}$  una función regular.

El subconjunto de Newton tropical de  $f$  es  $\text{Newt}_g(f) := \text{Conv}_{\text{BL}}(v : a_v \neq 0)$ .

Def: Sea  $f = \sum_{v \in V^{\text{trop}}(\mathbb{Z})} a_v \vartheta_v^y : V \rightarrow \mathbb{C}$  una función regular.

$$f^{\text{trop}} : V^{\text{trop}}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$$

$$p \mapsto \min_{a_v \neq 0} \langle p, v \rangle \leftarrow \text{ord}_{D_p}(f)$$

**Teorema (Bosco, M):** Sea  $f = \sum_{v \in V^{\text{trop}}(\mathbb{Z})} a_v \vartheta_v^y : V \rightarrow \mathbb{C}$  una función regular, y

$$S_f := \{ p \in V^{\text{trop}}(\mathbb{R}) : f^{\text{trop}}(p) \geq -1 \}.$$

Entonces:

$$S_f(\mathbb{Q}) = \text{Newt}_g(f)^\circ(\mathbb{Q}).$$

**Corolario (Bosco, M):** Sea  $(Y, D)$  un modelo mínimo Gorenstein Fano de  $V^y$ , con

$D = D_1 + \dots + D_r$ . El espejo Landau-Ginzburg es

$$W = \vartheta_{\text{ord}_{D_1}(\cdot)} + \dots + \vartheta_{\text{ord}_{D_r}(\cdot)} : V \rightarrow \mathbb{C},$$

y entonces  $S_D = S_W$ ,

$$S_D(\mathbb{Q}) = \text{Newt}_g(W)^\circ(\mathbb{Q}).$$

← Como el caso tórico

Para estudiar la esperanza hay que contestar:

**Pregunta 1:**

¿Hay un criterio de Cartier para divisores en modelos mínimos parciales de variedades de conglomero?

**Pregunta 2:**

¿Hay un criterio de amplitud para divisores en modelos mínimos parciales de variedades de conglomero?

Los criterios en el caso tórico:

Sea  $D = \sum a_p D_p$  un divisor en la variedad tórica  $Y_\Sigma$ .

**Criterio 1:**  $D$  es Cartier si y solo si para cada  $\sigma \in \Sigma(\text{máx})$  existe  $m_\sigma \in \mathbb{M}$  tal que  $\langle n_p, m_\sigma \rangle = -a_p$  para cada  $p \in \sigma(1)$ .

**Criterio 2:** Si  $Y_\Sigma$  es completa y  $D$  Cartier,  $D$  es amplio si y solo si:

$$\varphi_D : |\Sigma| \rightarrow \mathbb{R}$$

$$n \mapsto \langle n, m_\sigma \rangle \text{ para } n \in \sigma \left. \vphantom{\varphi_D} \right\} \text{ "función soporte de } D"$$

es estrictamente convexa.

Para generalizar el criterio de Cartier, hay que tener una noción de abanico para el modelo mínimo  $(Y, D)$  de  $V^v$ .

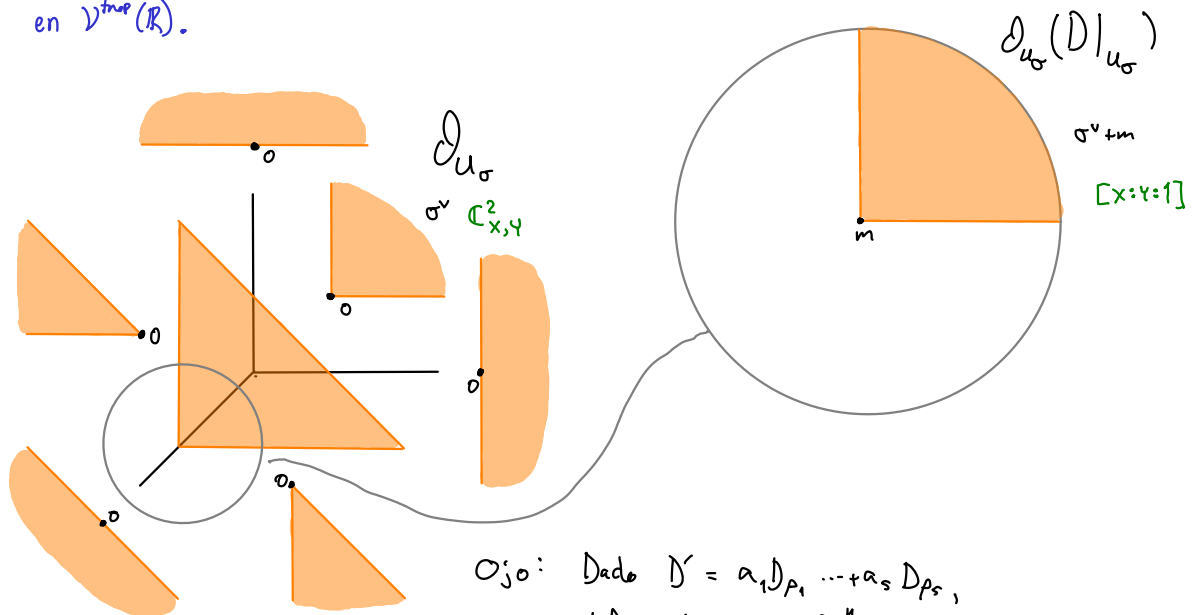
Def: El complejo de intersección dual  $\Sigma_{(Y,D)}$  es un complejo de conos en  $V^{trop}(\mathbb{R})$  cuyos conos son  $\{\sigma_I := \text{Cono}(\text{ord}_{D_i}(\cdot) : i \in I) : I \subset \{1, \dots, r\}, \bigcap_{i \in I} D_i \neq \emptyset\}$ .

- Los rayos son  $\mathbb{R}_{\geq 0} \cdot \text{ord}_{D_i}(\cdot)$ , y tenemos un cono para cada intersección no vacía de los componentes  $D_i$ .
- En el caso tórico  $\Sigma_{(Y,D)}$  es el abanico de  $Y$ .
- Es más fácil ver que no haya problemas con definir  $\sigma_I$  así trabajando con  $\mathcal{D}_{(Y,D)}^{\text{can}}$ .

Def (bosco, M): Define  $\sigma_I^v := \{p \in V^{trop}(\mathbb{R}) : \langle p, v \rangle \geq 0 \ \forall v \in \sigma_I\}$ ,  
 $A_{\sigma_I} := \mathbb{C}[\partial_p^v : p \in \sigma_I^v(\mathbb{Z})] / \sim$ , y  
 $U_{\sigma_I} := \text{Spec}(A_{\sigma_I})$ .  $\tilde{Y}_{\Sigma_{(Y,D)}}$  es el esquema con afines abiertos  $U_{\sigma_I}$ ,  $\sigma_I \in \Sigma_{(Y,D)}$ , y pegamento definido por relaciones entre funciones  $\partial$ .

**Pregunta 3:** Sea  $(Y, D)$  un modelo mínimo proyectivo dado por un subconjunto  $S \subset V^{trop}(\mathbb{R})$ . Entonces  $\Sigma_{(Y,D)}$  es el "abanico normal" de  $S$ . ¿Tenemos que  $\tilde{Y}_{\Sigma_{(Y,D)}} = Y$ ?

**Problema:** En el caso tórico se prueba esto utilizando traslaciones en  $M_{\mathbb{R}}$  - que no existen en  $V^{trop}(\mathbb{R})$ .



Ojo: Dado  $D' = a_1 D_{P_1} + \dots + a_s D_{P_s}$ ,  
define  $W_{D'} := z^{a_1 n_1} + \dots + z^{a_s n_s}$ .

Entonces  $\sigma^v = \{m \in M_{\mathbb{R}} : W_{D'}|_{U_{\sigma}}(m) \geq 0\}$  y  $\sigma^v + m = \{m' \in M_{\mathbb{R}} : W_{D'}|_{U_{\sigma}}(m') \geq -1\}$ .

En el caso de variedades de conglomerado, suele pasar que  $\{p \in V^{\text{trop}}(\mathbb{R}) : W_D|_{U_\sigma}(p) \geq 0\}$  y  $\{p \in V^{\text{trop}}(\mathbb{R}) : W_D|_{U_\sigma}(p) \geq -1\}$  tienen formas distintas - no se puede identificar sus  $V^{\text{trop}}(\mathbb{Z})$ -puntos.  $\frac{\partial^{i,j} v}{\partial p^i \partial p^j}$  generalmente no es una función  $\mathbb{Z}$ .

Sin embargo, tenemos el **candidato criterio de Cartier**:

$\dot{D}$  es Cartier si y solo si por cada  $\sigma \in \Sigma_{(Y,D)}$  (máx) existe  $p_\sigma \in V^{\text{trop}}(\mathbb{Z})$  tal que  $\langle p_\sigma, v \rangle = -a_p$  para cada  $p \in \sigma(1)$ ?

Otra opción que estamos explorando en el caso de variedades proyectivas es utilizar el atlas de afines abiertos de  $\mathbb{P}^N$ , sin hacer referencia al abanico.

Para generalizar el criterio de amplitud, hay que tener una noción de convexidad estricta para funciones soporte

$$\varphi_D : |\Sigma_{(Y,D)}| \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$v \longmapsto \langle p_\sigma, v \rangle \quad \text{para } v \in \sigma.$$

Def (Bosco, M):  $\varphi_D$  es una función soporte **convexa** en términos de líneas quebradas si para cada segmento quebrado  $\gamma: [t_1, t_2] \rightarrow |\Sigma_{(Y,D)}|$  y  $t \in [t_1, t_2]$ , tenemos que:

$$\varphi_D(\gamma(t)) \geq \left(\frac{t_2-t}{t_2-t_1}\right) \varphi_D(\gamma(t_1)) + \left(\frac{t-t_1}{t_2-t_1}\right) \varphi_D(\gamma(t_2)).$$

$\varphi_D$  es **estrictamente convexa** en términos de líneas quebradas si también para cada  $\sigma \in \Sigma_{(Y,D)}$ :

$$\langle p_\sigma, v \rangle = \varphi_D(v) \iff v \in \sigma.$$

**Candidato criterio de amplitud**: El divisor Cartier  $D$  es amplio si y solo si  $\varphi_D$  es estrictamente convexa en términos líneas quebradas.

Una herramienta importante de la geometría convexa poliedral para las pruebas tóricas es la suma de Minkowski:  $A + B = \{a+b : a \in A, b \in B\}$ .

En términos geométricos:  $\Gamma(Y, \mathcal{O}_Y(D_1)) \otimes \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y(D_2)) \hookrightarrow \Gamma(Y, \mathcal{O}_Y(D_1+D_2))$   
 $P_{D_1} + P_{D_2} \subset P_{D_1+D_2}$

Def (Bosco, M): Sean  $S$  y  $T$  subconjuntos de  $V^{\text{trop}}(\mathbb{R})$ . La **suma de Minkowski tropical** de  $S$  y  $T$  es

$$S \oplus T := \left\{ p \in V^{\text{trop}}(\mathbb{Q}) : \exists s \in S(\mathbb{Q}), t \in T(\mathbb{Q}), a \in \mathbb{Z}_{>0} \text{ tal que } \alpha_{as, at}^{ap} \neq 0 \right\}$$

$$= \left\{ p \in V^{\text{trop}}(\mathbb{Q}) : \exists \gamma: [0, \tau] \rightarrow V^{\text{trop}}(\mathbb{R}) \text{ tal que } \gamma(0) \in S(\mathbb{Q}), \gamma(\tau) \in T(\mathbb{Q}), \gamma\left(\frac{\tau}{2}\right) = \frac{p}{2} \right\}$$

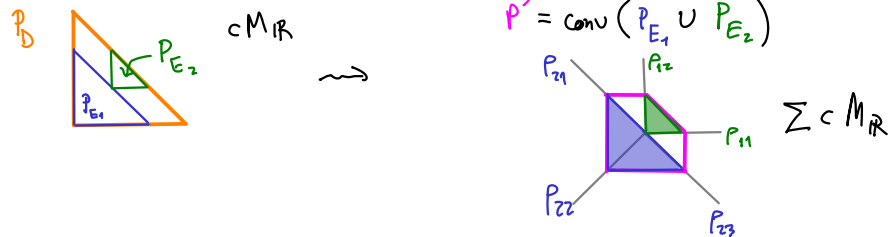
Casi Teorema (Bosco, M):  $\text{Conv}_{BL}(S+gT) = \text{Conv}_{BL}(S) + g \text{Conv}_{BL}(T)$

Además de las aplicaciones en pruebas, la suma de Minkowski tropical tendrá un papel importante en la generalización de la construcción de Batyrev-Borisov.

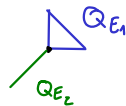
$(Y, D)$  Gorenstein Fano,  $D = E_1 + \dots + E_s$  partición globalmente generada.

$P_D = P_{E_1} + \dots + P_{E_s} \subset M_{\mathbb{R}}$  (codim  $s$  Calabi-Yau dado por intersección de divisores genericos en  $|E_i|$ )

Ejemplo (Calculado con Bosco):  $(\mathbb{P}^2, \begin{matrix} E_2 \\ E_1 \end{matrix})$   $P' := \text{Conv}(\bigcup_{i=1}^s P_{E_i})$

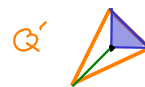
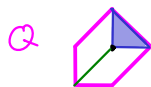


$$Q_{E_i} := \{ n \in \mathbb{N}_{\mathbb{R}} : \langle n, m \rangle \geq \varphi_{\sum_j D_{ij}}(m) \quad \forall m \in M_{\mathbb{R}} \}$$



$$Q := Q_{E_1} + \dots + Q_{E_s}$$

$$Q' := \text{Conv}(\bigcup_{i=1}^s Q_{E_i})$$



$P_D$  y  $Q'$  son politopos reflexivos duales

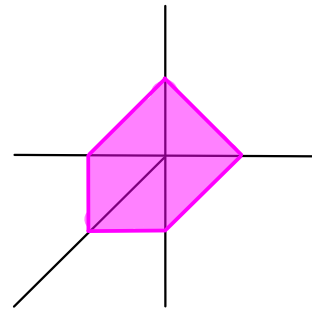
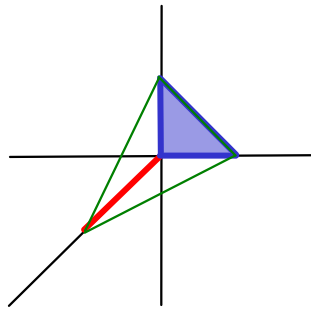
$P'$  y  $Q$  son politopos reflexivos duales

Las intersecciones completas definidas por  $P_D = P_{E_1} + \dots + P_{E_s}$  y  $Q = Q_{E_1} + \dots + Q_{E_s}$  forman pares espejos de variedades Calabi-Yau.

Caso de variedades de conglomerado (con BOSCO):

$$\nabla = \text{Conv}_{BL}(\nabla_1 \cup \nabla_2)$$

$$\Delta^* = \nabla_1 + \nabla_2$$



$$\Delta = \text{Conv}_{BL}(\Delta_1 \cup \Delta_2)$$

$$\nabla^* = \Delta_1 + \Delta_2$$

